Vizvári Z.¹ – Győrfi N.² – Klincsik M.³ – Sári Z.³ – Odry P.⁴

¹Mérnöki és Smart Technológiák Intézet, Környezetmérnök Tanszék Pécsi Tudományegyetem, Műszaki és Informatikai Kar 7624 Pécs, Boszorkány út 2.

²Élettani Intézet Pécsi Tudományegyetem, Általános Orvostudományi Kar 7624 Pécs, Szigeti út 12.

³Informatika és Villamos Intézet, Műszaki Informatika Tanszék Pécsi Tudományegyetem, Műszaki és Informatikai Kar 7624 Pécs, Boszorkány út 2.

⁴Informatikai Intézet, Számítógéprendszerek és Irányítástechnikai Tanszék Dunaújvárosi Egyetem 2401 Dunaújváros, Táncsics Mihály utca 1/A fszt.

ÚJ MEGKÖZELÍTÉSŰ ELEKTROMOS IMPEDANCIA TOMOGRÁFIÁS REKORNSTRUKCIÓS ALGORITMUS ÁLTALÁNOSÍTÁSA TETSZŐLEGES MÉRETŰ HÁLÓZATRA

Kutatócsoportunk a módszer megvalósításának egy új nézőpontját vizsgálja. Ennek következtében a vizsgált, kontinuumnak tekinthető, anyagot koncentrált paraméterű, lineáris hálózatként modellezzük. Cikkünkben sikerült általánosítani a matematikai modellt olyan mértékben, hogy az anyag dielektromos állandóját (azaz koncentrált paraméter párját a kapacitást) is figyelembe vegye. Így annak ellenére, hogy jelentősen megnöveltük az ismeretlenek számát a modellben lehetőséget teremtettük a multifrekvenciás megközelítés alkalmazására, aminek következtében az optimalizált egyenletrendszer mindig túlhatározott marad. Jelen cikkünkben az optimalizáló eljárás általánosított változatát mutatjuk be, amely esetében a képalkotás felbontását a gráf paramétereinek definiálásával állíthatjuk be. A modell hatékonyságát szimulációkkal támasztjuk alá. Vizsgáltuk a rekonstrukció működését a használt adatstruktúrákhoz való zaj hozzáadásával. Cikkünkben bemutatjuk, hogy az 1%-os zaj sincs számottevő hatással a rekonstrukcióra.

1. BEVEZETÉS

Az eddigiekben Maple szoftvert használtunk az inverz probléma megoldó algoritmus fejlesztéséhez, amely szimbolikus matematikai eljárások programozását teszi lehetővé. Ez kutatási célokra kitűnően alkalmas, azonban hátránya, hogy így a nagyméretű egyenletrendszerek megoldása igen lassú és nehézkes. Ebből fakadóan kizárólag a kisebb hálózatok, melyek kisebb méretű egyenletrendszereket reprezentálnak, oldhatók meg ezzel a programmal.

A konkrét alkalmazás azonban (a felbontás-növelés miatt) lényegesen nagyobb egyenletrendszerek megoldását indokolja, így a Maple-ben történő fejlesztés helyett áttértünk

a Matlab alatt történő programozásra. Ennek segítségével lényegesen gyorsabb eljáráshoz jutunk, amellett hogy egy teljesen új matematikai algoritmust kell leprogramoznunk. Így a szimbolikus eljárásban használt megoldásokat nem ültethetjük át a Matlab programban, hanem teljesen új megközelítésben, numerikusan kell az algoritmust megfogalmazni. Az ehhez szükséges matematikai alapokat dolgoztuk ki az előző félévben, majd ezt folytatva kísérleteket tettünk az ilyen módon kialakított egyenletrendszer megoldására. A következőkben a kísérletekhez felhasznált numerikus algoritmusokat mutatjuk be.

Az EIT kiértékelési algoritmusainak elméleti hátterével foglalkozó szakirodalmak mennyisége igen jelentős abból fakadóan, hogy a roncsolásmentes eljárást igen széles körben hasznlják. Beszámolónkban igyekeztünk azokat megjelentetni, melyek valamilyen módon hasznunkra váltak. Ezek a [1] – [27].

Az EIT mérés alapvető parciális differenciál egyenlete képezi a kiértékelés alapját: [2]

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = 0 \tag{1.1}$$

Ez az elektromosságtanban Poisson-egyenletként ismert és abban az esetben, ha a vezetőképesség a helytől független, azaz homogén, izotróp közegben, Laplace-egyenletre egyszerűsödik: [2]

$$\Delta \phi = 0 \tag{1.2}$$

Mind a Poisson-, és a Laplace-egyenlet megoldható az ún. Dirichlet-, és Neumannperemfeltételek, vagy mindkettő egyidejű megadásával. [2]

A megoldáshoz többféle matematikai módszer áll a rendelkezésre. Ilyenek a véges elem módszer (FEM, Finite Element Method, [2]), a peremelem módszer (BEM, Boundary Elemnt Method, [3]), a véges differenciák módszere (FD, Finite Differences) stb.

A mérés során a legfőbb célunk, hogy az (1.1) egyenletben szereplő, helytől függő vezetőképességet határozzuk meg. Erre különböző inverz probléma megoldási módszerek állnak a rendelkezésünkre: [4]

- LBP: linear back projection ("lineáris visszavetítés")
- nem lineáris módszerek,
- heurisztikus (empírikus) módszerek.

Az EIT mérések a mérési geometria szempontjából két fő csoportra oszthatóak fel:

- 1. ha a földfelszínen helyezzük el az elektródákat, végtelen féltérrel modellezhetjük az adott szituációt;
- 2. ha élő fára helyezzük el az érzékelőket egy kör mentén, zárt geometriával, körrel modellezhetjük a mérést.

2. AZ ALGORITMUS ÁLTAL KIALAKÍTOTT EGYENLETRENDSZER

A képrekonstrukció által jelentett inverz probléma megoldása lényegében a következő, az (1.1) egyenlet és a szükséges peremfeltételek diszkrét változatát jelentő, egyenletrendszer megoldását jelenti, amelyben ismeretlenek a vezetőképesség (G_b) és kapacitás (C_b) mátrix elemei, illetve a mért potenciál vektor (\vec{v}_b) nem peremen vett elemei:

$$\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{b}}\vec{v}_{\boldsymbol{b}} + j\omega(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{b}}\vec{v}_{\boldsymbol{b}}) - \vec{\iota}_{g} = 0$$

$$(2.1)$$

A (2.1) egyenletben ismerjük a gráf él-csúcs incidencia mátrixát (A^T), a körfrekvenciát (ω), valamint a gerjesztőáram vektort (i_g), valamint j az imaginárius egység. Így a

megoldandó egyenletrendszer kvadratikus (nem lineáris), hiszen az egyes ágakon értelmezett admittancia és feszültség értékek szorzatai jelennek meg.

A (2.1) egyenletrendszer csak egy adott generátor pozíció és gerjesztőjel frekvencia esetében írható fel. Amennyiben egy másik generátor pozíciót, vagy egy másik gerjesztőjel frekvenciát alkalmazunk, egy újabb egyenletrendszert kell felírnunk. Ebből következik, hogy a teljes egyenletrendszer, amelynek megoldása jelenti a képrekonstrukció során jelentkező inverz problémát,

$$eq = (n-1) \cdot n_{fr} \cdot n_{meas} \tag{2.2}$$

ahol

n a gráf csomópontjainak száma

 n_{fr} a mérés során alkalmazott gerjesztőjel frekvenciák száma n_{meas} a mérés során alkalmazott generátor pozíciók száma

3. EGYENLETRENDSZER MEGOLDÓ ALGORITMUSOK – NEM LINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

Mivel a (2.1.) egyenletrendszer nem lineáris egyenletrendszer, ezért annak megoldására (még ha túlhatározott is), a következő, széles körben használt algoritmusok használatával próbálkoztunk:

- 1. Newton-módszer
- 2. Singular Value Decomposition (szinguláris értékekre való felbontás)
- 3. Regularizáció

A vonatkozó szakirodalmat ([28]) tanulmányozva ezeket találtuk az ilyen jellegű matematikai problémák megoldásának a legszélesebb körben használtnak, így ezeket tekintjük végig a következőkben.

3.1. A Newton-módszer

Legyen $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, az F vektor elemei legyenek az $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_m(x)$ függvények. Az F(x) = 0 egyenletrendszer esetén a Newton-módszer alakja [29]

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k) \cdot F(x_k), (k = 0, 1, 2...)$$
(3.1.1.)

ahol

 x_{k+1} a megoldásvektor az iteráció k+1-edik lépésében x_k a megoldásvektor az iteráció k-adik lépésében $I(x_k)$ az azyapletrendezer Jacobi métriva az x helven

 $J(x_k)$ az egyenletrendszer Jacobi-mátrixa az x_k helyen:

$$\boldsymbol{J} = \left[\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$
(3.1.2.)

A Newton-módszer iteratív numerikus optimalizáló algoritmus, melyet széles körben alkalmaznak nem-lineáris egyenletrendszerek megoldásának kereséséhez. A módszer előnyei közé tartozik, hogy (amennyiben az egyenletrendszer Jacobi-mátrixa invertálható), egyszerűen programozható és meredek (általában) négyzetes konvergenciával rendelkezik a közelítés sorozata [29].

A Newton-módszer alkalmazása a következőképpen történik:

1. k = 0 esetben kiszámítjuk a következő egyenletet:

$$x_1 = x_0 - J^{-1}(x_0) \cdot F(x_0)$$
(3.1.3.)

ahol

a kezdeti értékeket tartalmazó vektor

a megoldásvektor, mely az iteráció következő lépésnek kerül átadásra

2. k = 1 esetben is kiszámítjuk a következő egyenletet:

$$x_2 = x_1 - J^{-1}(x_1) \cdot F(x_1)$$
(3.1.4.)

3. majd ezt addig ismételjük, míg az általunk definiált leállási feltétel teljesül, ekkor az algoritmus kilép az iterációból

Az iteráció során kialakuló vektor sorozat az egyenletrendszer megoldásához konvergál. A konvergenciát több módon mérhetjük, ami alapján a leállási feltételt definiálhatjuk. Például a mi esetünkben a következő leállási feltételt definiáltuk: [30]

$$\|x_{k+1} - x_k\|_2 < \varepsilon \tag{3.1.5.}$$

ahol

 ε a felhasználó által definiált hibahatár (leállási feltétel) $\|\cdot\|_2$ az Euklédeszi norma, ami az x vektor "hosszát" jelenti:

$$\|x\|_{2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}$$
(3.1.6.)

A Newton-módszer hátrányai közé tartozik, hogy mivel egy olyan optimalizáló eljárás, amely általában négyzetesen konvergál, nagyon gyors konvergenciával találja meg az optimalizálandó függvény minimumát. Így a megtalált minimum matematikailag elégíti ki a megoldandó egyenletrendszert, azonban a mi esetünkben a megtalált minimum nem csak matematikailag kell, hogy kielégítse az egyenletrendszert, hanem fizikailag is helyesnek kell lennie. Ez sajnos csak abban az esetben teljesül, ha az x_0 kezdeti érték elég közel van az egyenletrendszer megoldásához. [29] Ez jelenti a módszer alkalmazhatóságának legnagyobb korlátját, azaz mielőtt belekezdenénk az optimalizálásba már rendelkeznünk kell priori ismeretekkel a rekonstruálandó belső anyagszerkezetről.

A méréskiértékelő algoritmus esetében kísérletet tettünk a Newton-módszer alkalmazására, azonban sikertelen volt, ugyanis az általunk felépített egyenletrendszer, Jacobi-mátrixa nem invertálható. Így egy másik matematikai módszerrel kellett kiegészíteni az algoritmust.

3.2. Mátrixok szinguláris felbontása és általánosított inverze [28]

Az elektromos impedancia tomográfia (EIT) és az impedancia spektroszkópia eljárás is a Newton-iteráció alkalmazásával olyan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.2.1.}$$

lineáris egyenletrendszer megoldására vezet, amelyekben az A mátrix rang-hiányos és/vagy rosszul kondicionált. A probléma analízisét a mátrixok szinguláris értékek szerinti felbontásával (Singular Value Decomposition, SVD) lehet megvilágítani.

Álljon az (3.2.1.) lineáris egyenletrendszer A mátrixa m sorból és n oszlopból. Az A mátrixot tekinthetjük úgy is, mint egy lineáris leképezés az R^n vektortérből az R^m vektortérbe. A modell mérési adataiból kapjuk a jobb oldali $d \in R^m$ adatvektort, ezért az R^m teret az adattérnek is nevezzük. Az A mátrixot együttesen határozza meg a modell és a mérés. A keresett $x \in R^n$ vektor az EIT modellben például az a sűrűségi térkép, amelyet az EIT keres. Ezért az R^n vektorteret modell térnek nevezzük.

Tetszőleges *m* és *n* esetén *A* felbontható alábbi formában mátrixok szorzatára [28]

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \tag{3.2.2.}$$

ahol V^T a V mátrix transzponáltja (komplex esetben még konjugálni is kell). A felbontásban

- U egy $m \times m$ méretű ortogonális mátrix, melynek oszlop vektorai az R^m adattér ortogonális és normált bázisát alkotják.
- V egy $n \times n$ méretű ortogonális mátrix, melynek oszlop vektorai az R^n modell tér ortogonális és normált bázisát alkotják.
- S egy $m \times n$ méretű diagonális mátrix nem negatív diagonális elemekkel, melyeket szinguláris értékeknek nevezünk.

Az U és V mátrixok előállításához nézzük meg a tulajdonságaikat. Az U és V mátrixok ortogonális mátrixok, ami azt jelenti, hogy inverzük a transzponáltjuk

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}_{\mathrm{m}}, \, \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_{\mathrm{n}} \,. \tag{3.2.3.}$$

Vegyük a V mátrix i-ik $V_{,i}$ oszlop vektorát. (A sor index helyén a pont jelöli azt, hogy az összes sort kell venni!) Az ortonormáltság azt is jelenti, hogy

$$V^{T} \cdot V_{,i} = e_{i}, (i=1,2,...,n)$$
 (3.2.4.)

Ahol e_i vektor az i-ik egységvektort jelöli, melynek minden koordinátája 0 kivéve az i-ik pozíció helyet, ahol 1 áll. Ahonan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_{,i} = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{V}_{,i} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_{,i}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{i} = \mathbf{s}_{i} \cdot \mathbf{U}_{,i}$$
(3.2.5.)

hasonlóan

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{,i} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{U}_{,i} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{e}_{i} = \mathbf{s}_{i} \cdot \mathbf{V}_{,i}.$$
(3.2.6.)

Számoljuk az $A^T \cdot A$ és $A \cdot A^T$ szimmetrikus mátrixok sajátvektorait és sajátértékeit

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{V}_{,i} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_{,i}) = \mathbf{s}_{i} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{,i} = \mathbf{s}_{i}^{2} \cdot \mathbf{V}_{,i}$$
(3.2.7.)

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{U}_{,i} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{,i}) = \mathbf{s}_{i} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_{,i} = \mathbf{s}_{i}^{2} \cdot \mathbf{U}_{,i}$$
(3.2.8.)

Tehát a szinguláris értékeket úgy kapjuk, hogy vagy az $A^T \cdot A$ vagy az $A \cdot A^T$ mátrix sajátértékeiből négyzetgyököt vonunk. (A két mátrix sajátértékei ugyanazok és nemnegatívok.) Továbbá az U mátrix oszlopvektorait úgy kapjuk, hogy az $A \cdot A^T$ szimmetrikus

mátrix sajátvektorait ortonormáljuk. Hasonlóan a V^T mátrix oszlopvektorait úgy kapjuk, hogy az $A^T \cdot A$ szimmetrikus mátrix sajátvektorait ortonormáljuk.

Jelölje p az A mátrix pozitív szinguláris értékeinek számát

$$s_1 \ge s_2 \ge \dots s_p > 0 = s_{p+1} = \dots = s_{\min(n,m)} = 0$$
 (3.2.9.)

Ekkor bontsuk fel az S diagonális mátrixot blokkokra. A bal felső pxp méretű diagonális mátrixot jelölje S_p

$$S = \frac{S_p}{0} \quad \frac{0}{0}$$

Bontsuk fel az U és a V^T mátrixokat úgy blokkokra, hogy az első p oszlopvektort jelöljük U_p és V_p -vel

$$\begin{bmatrix} U_{1}, U_{2}, \dots, U_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1}, V_{2}, \dots, V_{n} \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} U_{p}, U_{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1}, V_{0} \end{bmatrix}^{T}.$$

Ekkor az A mátrix $U \cdot S \cdot V^T$ szinguláris felbontását írhatjuk

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}} \tag{3.2.10.}$$

tömörebb formában, ahol U_p mxp, S_p pxp és V_p nxp méretű mátrix.

Most már készen állunk arra, hogy definiálni tudjuk az A mátrix általánosított inverzét.

3.3. Moore-Penrose-féle általánosított inverz [28]

Az A mxn méretű mátrix általánosított inverze alatt értjük az

$$A^{+} = V_{p} \cdot S_{p}^{-1} \cdot U_{p}^{T}$$
(3.3.1.)

nxm méretű mátrixot.

Mivel S_p egy diagonális mátrix, ezért inverze olyan diagonális mátrix, amelyben az eredeti mátrix diagonálisában szereplő számok reciprok értékei állnak.

Az A^+ mátrix onnan kapta az inverz nevet, mert rendelkezik az inverzre jellemző.

$$A \cdot (A^+ \cdot A) = (A \cdot A^+) \cdot A = A \tag{3.3.2.}$$

tulajdonsággal, "mintha" $A^+ \cdot A$ és $A \cdot A^+$ is egység mátrix lenne. [28]

Az (3.2.1.) alakú lineáris egyenletrendszer megoldását az általánosított inverz segítségével a szokásos módon kapjuk

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{d}. \tag{3.3.3}$$

- 1. Ha az A mátrix invertálható, akkor az inverzre $A^{-1} = A^+$ teljesül.
- 2. Ha az A mátrix oszlopainak rangja teljes, akkor az $(A^T \cdot A)$ mátrix invertálható akkor is, ha esetleg A nem invertálható. Ilyen esetben $(A^T \cdot A)^{-1} = A^+$ és ez egyezik az (3.2.1.) egyenletrendszer legkisebb négyzetes megoldásával.
- 3. Van olyan eset, amikor az $A^T \cdot A$ nem invertálható és ugyanakkor az általánosított inverz szolgáltat megoldást az (1) egyenletrendszerre.

Visszatérve a Newton-módszer alkalmazására, melynek gátja ez esetben, hogy a (3.1.3.)as egyenletben szereplő J^{-1} nem létezik, a következő változtatással próbáltuk meg a módszert alkalmazni:

$$x_{k+1} = x_k - J^+(x_k) \cdot F(x_k), (k = 0, 1, 2...)$$
(3.3.4.)

ahol

 ${\bf J}^{\scriptscriptstyle +}$ a Jacobi-mátrix általánosított (Moore-Penrose) inverze, melyet a ${\bf J}$ mátrix szinguláris felbontásával állítottunk elő.

3.4. Regularizáció

[28] – [31] szerint a jól kondicionált (well-posed) feladatoknak a következő 3 feltételt kell kielégítenie:

- a megoldás létezik,
- egyetlen megoldás létezik,
- a megoldás stabil.

A vonatkozó szakirodalom többsége szerint [28] – [31] és a tapasztalataink szerint a fennálló numerikus matematikai inverz probléma rosszul feltett problémának (ill-posed problem) tekinthető, mely esetében matematikai szempontból a problémát az együttható mátrix szingularitása és kicsi sajátértékei jelentik. A mérési hibák létezése jelentős mértékben alkalmazható numerikus egyenletrendszer megoldó befolyásolja az módszerek hatékonyságát, így a klasszikus egyenletrendszer megoldási módszerek nem eléggé hatékonyak, stabil, a hibákra kevésbé érzékeny megoldás előállításához. Ezért ún. regularizációs módszerekhez kell folyamodnunk, ami azt jelenti, hogy az eredeti problémát illetve annak megoldását egy olyan problémával illetve annak megoldásával közelítjük, amely számottevően kevésbé érzékeny a hibákra. [31]

A 3.3. fejezetben láttuk, hogy a szinguláris értékekre való felbontás miért nem bizonyul elég hatékony megoldásnak az (2.1.) egyenlet megoldására, ugyanis a problémát a **J** mátrix ranghiányos és túl sok kis értékű sajátértéke van. Ez alapján logikusan következik a legegyszerűbb regularizációs technika a Csonkított szinguláris felbontás (Truncated Singular Value Decomposition, TSVD) eljárás, melyet kis méretű egyenletrendszerek megoldására mi is sikeresen alkalmaztunk.

Csonkított szinguláris felbontás (Truncated Singular Value Decomposition, TSVD) eljárás

A csonkított szinguláris felbontás eljárás során a (3.2.10.) egyenlet szerint végrehajtott szinguláris értékekre való felbontást végezzük el, majd a (3.3.1.) szerint invertáljuk. A TSVD eljárás során a cél, hogy az S mátrix invertálásakor keletkező túl nagy, hibás értékeket kiszűrjük. [31] Az eljárás során egy tolerancia értéket adunk meg és ezzel módosítjuk az S mátrixot: [31]

$$s_{i,j} = \begin{cases} s_{i,j}, \text{ ha } s_{i,j} > \alpha \\ & i = j \\ 0, \text{ ha } s_{i,j} < \alpha \end{cases}$$
(3.4.1.)

Itt α a tolerancia érték. Az (1.26)-ból következik, hogy amennyiben α -t kicisre (azaz a numerikus számítások 0 közeli értékére választjuk), az S⁻¹ mátrixban nem jelennek meg azok a nagy értékek, amelyek az általános inverz számításakor problémát jelentenek. A módszer elvéből fakadóan csökkent az invertálandó mátrix oszloprangját és mindemellett a sajátértékek kizárása olyan információhiányhoz vezet, ami pontatlanságot okozhat az egyenletrendszer megoldásában.

Ezt figyelembe véve kísérletet tettünk a TSVD módszer alkalmazására, de a teszteredményeink alapján arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer megoldása során olyan mértékű pontosságra van szükség, amely nem engedi meg, hogy az ily módon kiszűrt értékeket figyelmen kívül hagyjuk. A módszer alkalmazhatóságát tovább nehezíti, hogy az α korrekciós tényező pontos értéke igen fontos. Ennek meghatározása azonban igen nagy problémákba ütközik, ugyanis ez próbálkozással hajtható végre. [31] A vonatkozó irodalom azt javasolja, hogy több különböző α értékkel oldjuk meg az egyenletrendszert, majd válasszuk ki azt, amellyel kapott eredmények a legközelebb állnak a valósághoz. [31]

Mindezt figyelembe véve úgy döntöttünk, hogy a TSVD eljárás nem alkalmas arra, hogy alkalmazzuk a mi esetünkben felmerülő inverz probléma megoldására, ezért más regularizációs technikákat kerestünk.

Tikhonov-féle regularizáció

A regularizáció célja (hasonlóan a TSVD-hez), hogy az S mátrix kis értékeinek hatását csökkentsük, de olyan módon, hogy minimalizáljuk az információvesztést, tehát csökkentsük az invertálandó mátrix oszloprangját. A Tikhonov-féle regularizáció általános alakja a (3.2.1)-re felírva:

$$\underline{x}_{\lambda} = \operatorname{argmin}\left\{ \left\| \underline{A}\underline{x} - \underline{b} \right\|_{2}^{2} + \lambda^{2} \left\| \underline{L}(\underline{x} - \underline{x}^{*}) \right\|_{2}^{2} \right\}$$
(3.4.2.)

ahol

 λ a regularizációs paraméter

 x_{λ} a megoldásvektor optimális λ esetében

 $||Ax - b||_2^2$ az (1.12) egyenletrendszer reziduál normája $||L(\underline{x} - \underline{x}^*)||_2^2$ a megoldás szeminormája egy \underline{x}^* első közelítésű megoldás figyelembevételével

A (3.4.2)-ből látható, hogy a regularizáció azt követeli meg, hogy az $\left\|L(\underline{x}-\underline{x}^*)\right\|_2^2$, azaz a megoldás Euklédeszi normája kicsi legyen ($||\underline{x}||_2 \to 0$). A szakirodalom szerint [4], mivel az esetek többségében a megoldásról nem áll elegendő információ a rendelkezésünkre, ezért a (3.4.2.)-be $\underline{L} = \underline{I}I$ -t (egyeségmátrix) és \underline{x}^* esetében nullvektorból indulunk ki (elhagyjuk). Így az (3.4.2.) a következőképpen egyszerűsödik:

$$\underline{x}_{\lambda} = \operatorname{argmin}\left\{\left\|\underline{A}\underline{x} - \underline{b}\right\|_{2}^{2} + \lambda^{2}\left\|\underline{x}\right\|_{2}^{2}\right\}$$
(3.4.3.)

A (3.4.3.)-ból jól látszik, hogy a Tikhonov-féle regularizáció célja egyensúlyt találni az egyenletrendszer reziduál normájának (hibájának) minimális értéke és a megoldás normájának minimális értéke között. Az egyensúlyt a λ regularizációs paraméter teremti meg, ebből fakadóan a megfelelő értékű λ paraméter megválasztása létfontosságú a regularizáció során amellett, hogy a paraméter értéke egyáltalán nem triviális.

A λ paraméter hatása lényegében az S mátrix invertálása során jelentkezik. Ekkor S⁻¹ mátrix főátlójában a reciprok képzést a következő az ugvanis "szűrő függvénnyel"korrigáljuk [30]:

$$f_{i,j} = \frac{s_{i,j}^2}{s_{i,j}^2 + \lambda^2}$$
(3.4.4.)

A (3.4.4.) képletben látszik, hogy amennyiben $s_{i,j} >> \lambda$, $f_{i,j} \approx 1$ és amennyiben $s_{i,j} << \lambda$, $f_{i,j} \approx 0$. Ez azt jelenti, hogy ez a "szűrő függvény" az invertálandó mátrix saját értékeinek a reciprokét úgy módosítja, hogy e két szélső érték között monoton változzanak. Így gyakorlatilag az eddig ismertetett módszerek közül ez esetben veszítjük el a legkevesebb információt úgy, hogy mindemellett közelítjük az egyenletrendszer megoldását.

A módszer alkalmazásának legnagyobb nehézségét a helyes λ paraméter értékének megválasztása jelenti. Ezt ugyanis részben próbálgatással, illetve grafikai úton határozzuk meg. [31] Amennyiben a $||\underline{Ax} - \underline{b}||_2$ reziduál norma értékének függvényében log-log diagramon ábrázoljuk a megoldás $||\underline{x}||_2$ normáját, különböző λ értékek figyelembe vételével, a következőt kapjuk:



A 3.4.1. ábrán látható, hogy a kirajzolódó görbe (ill-posed jellegű problémák esetében) mindig L alakú, amiből a nevét is kapta: L-görbe. Az L-görbéből állapítható meg az optimális λ paraméter érték, amely esetében mind a reziduál norma, mind pedig a megoldás normája minimális, azaz az L-görbe sarokpontjában (vagy annak közelében).

A Tikhonov-féle regularizációs eljárásra épített iterációs algoritmus legnagyobb hátránya, hogy minden iterációs lépésben (amennyiben szükséges) több százszor meg kell oldani az egyenletrendszert, hogy az optimális λ értéket megtaláljuk.

4. A PROGRAM MŰKÖDÉSE ÉS ESETTANULMÁNYOK

Az egyenletrendszer megoldásához iteratív módszert választottunk (Newton-módszer), ami kapcsán azt feltételeztük, hogy az optimalizálandó függvény az iteráció lépései környezetében lineáris. Az egyenletrendszer Jakobi mátrixa azonban szinguláris mátrix, így az invertáláshoz a Tikhonov-regularizációt használtuk. Az optimalizáló algoritmust nem saját magunk programoztuk, hanem az ingyenes Regtools MatLab Toolbox-ot használtuk. ([32], [33], [34])

A kód futtatása során bemeneti adatként a következőkel kell megadnunk:

1. Gráf adatai:

- N_shells (a héjak száma, j): jelenleg értéke 2 lehet,
- N_electrodes (az elektródák száma, i): értéke 8, 16, 32, 64, (2 hatványok),
- 2. Adatgyűjtés adatai:
- freq: az adatgyűjtés frekvenciái,

- GNDPos: az adatgyűjtő rendszer generátor földpontjának pozíciói,
- GENPos: az adatgyűjtő rendszer generátor melegpontjának pozíciója,
- Soutce_current (a gerjesztőáram értéke),
- 3. Zajgenerálás: (fehér zaj)
 - add_noise (zaj hozzáadása az R0 és C0 értékekhez): értéke 0, vagy 1 lehet (amennyiben 1et írunk be, a script hozzáadja a generált fehér zajt),
 - r_perc: a relatív hibájának értéke az R0 adatsorhoz adva,
 - c_perc: a relatív hibájának értéke a C0 adatsorhoz adva,
- 4. Az egyenletrendszer megoldó algoritmus paraméterei:
 - R0, C0: a nemlineáris egyenletrendszer megoldó algoritmusának kezdeti értékei,
 - err_goal: a közelítés legnagyobb hibája (a hiba az iteráció aktuális egyenletrendszere esetében az egyenletek összege)
 - rel_err_goal: az egymás utáni iiterációs lépések hibájának relatív eltérése.

A paraméterek megadása (a megkötéseken kívül) teljes mértékben szabadon a felhasználó által definiálható, így az algoritmus rugalmasan alkalmazható a fizikai modelleken történő validálások során. Bár az algoritmus jelenleg a Sheffield-módszerre, mint adatgyűjtési stratégiára van optimalizálva, de ezen kívül a felhasználó definiálhat más adatgyűjtési módokat. A fehér zaj hozzáadásával a megoldó algoritmus stabilitását lehet vizsgálni.

A fent felsorolt paraméterek megadása után futtatható a program, amely futás során a következő fejezetben részletezett műveleteket végzi el.

Az algoritmus működését a következő folyamatábra foglalja össze (4.1. ábra):



Mint az a 4.1. ábrán is látszik, a program jelenleg szimuláció futtatására alkalmas. Így két fő programrészből épül fel:

- 1. Szimulációs fázis: amely lényegében a kezdeti értékek: R0 és C0, valamint a kezdeti értékekhez tartozó egyenletrendszer előállítására szolgál, célja az iteráció indításához szükséges információ előállítása,
- 2. Analízis: feladata a mérési adatokkal módosított és a kezdeti feltételekkel kapott egyenletrendszer optimalizálása.
- A Szimulációs fázis lépései:
 - 1. A struktúra paramétereinek inicializálása: az input paraméterek figyelembe vétele,
 - 2. A struktúrát reprezentáló branch node mátrix létrehozása: a program előállítja a felhasználó által definiált gráf-struktúrához tartozó A mátrixot,
 - 3. Admittancia kezdeti értékek megadása: az R0, C0 és freq paraméterek segítségével kiszámítja az Y mátrix értékeit,

- 4. A szimuláció paramétereinek megadása: az input paraméterek közül a freq, GNDPos és GENPos figyelembe vétele,
- 5. Szimuláció: az előző pontokban összegyűjtött adatok segítségével az megoldása \vec{v}_b -re.

Az Analízis programrész lépései:

- 6. Admittancia értékek módosítása: szimuláció esetében itt kell definiálni azt az R és C eloszlást, melyet rekontruálni szeretnénk
- 7. Szimuláció: az előző pontban definiált R és C értékekkel helyettesített 1.3. fejezetben leírtak alapján összeállított (2.1) alakú lineáris egyenletrendszer megoldása \vec{v}_b -re,
- 8. A nemlineáris egyenletrendszer felépítése: az 5. lépésben előállított egyenletrendszer adatainak módosítása a 7. pontban kapottakkal,
- 9. A Jacobi-mátrix felépítése: az egyenletrendszer megoldó algoritmus megköveteli az egyenletrendszer Jacobi-mátrixának definiálását, ami a mi esetünkben nem közelítéssel, hanem explicit történik,
- 10. Tikhonov-regularizáció és iterációs lépés:
 - a. a Tikhonov-regularizáció során az egyenletrendszert kétszászor oldja meg az algoritmus különböző λ érték esetében, majd meghatározza az L-görbe sarokpontjához tartozó, optimális λ értéket,
 - b. a kapott λ érték segítségével módosítja a változók vektorát (<u>x</u>)
- 11. Hibakritérium vizsgálata:
 - a. megfelel: kilépés és eredmények megjelenítése,
 - b. nem felel meg: a megoldás vektort (\underline{x}) visszahelyettesíti a 9. pontban kialakított egyenletrendszerbe, majd belép az iteráció következő lépésébe.

4.1 Hibaanalízis

A kód lefutása után, azaz a nemlineáris egyenletrendszer optimalizálásának végeredményként a felépített gráf struktúra ágain levő ellenállás és kondenzátor értékeket kapjuk. A gráf struktúrától függően előfordulhat, hogy nagy számú végeredményt kell áttekinteni, ezért célszerűnek találtuk a végeredmények grafikus ábrázolását. Ezért a program lefutása után a következő diagramok jelennek meg:

- 1. a legutolsó iterációs lépés L-görbéje,
- 2. R on Branches: ellenállás értékek ábrázolva a gráf ágainak sorszáma függvényében (a szimulációhoz használt és az analízis során számított értékek is)
- 3. C on Branches: kondenzátor értékek ábrázolva a gráf ágainak sorszáma függvényében (a szimulációhoz használt és az analízis során számított értékek is)
- 4. Relative Error in R: a szimulációhoz használt (R) és az analízis során számított ellenállás Rsz értékek relatív hibája, a következőképpen számolva:

$$h(\%) = 100 \cdot \frac{R - R_{sz}}{R} \tag{4.1.1}$$

5. Relative Error in C: a szimulációhoz használt (C) és az analízis során számított ellenállás Csz értékek relatív hibája, a következőképpen számolva:

$$h(\%) = 100 \cdot \frac{C - C_{sz}}{C} \tag{4.1.2}$$

A futtatás után megjelenő ábrákról könnyen és gyorsan megállapítható, hogy a megoldás mennyire felel meg a felhasználó elvárásainak.

4.2 Esettanulmányok

A mérési stratégia mindegyik példa esetében az ún. Sheffield-módszert követik. Az eredmények a Megrendelő hardware/software rendszerén futtatott eredményekből lettek generálva.

Az első esettanulmányban alkalmazott gráf a következő:



A betáplált adatok:

- a mérési frekvenciák = $6,28 \cdot 10^{-4},6,28,6,28 \cdot 10^{4}$
- az alkalmazott gerjesztőáram amplitúdója 1 µA
- a hozzáadott zaj értéke 0 %

Az optimalizáció eredményeit a következő két ábra mutatja:





A relatív hiba eloszlás a következő:





Az eljárás 24 lépésből konvergált, a hiba értéke: $1.5651 \cdot 10^{-15}$, a futási idő: 2.550041 s. Az egyenletek száma: 384, míg az ismeretlenek száma: 296. A fenti ábrákból is látható, hogy a rekonstrukció sikeres, a visszaállított R és C értékek relatív hibája 2% alatt van.

A második esettanulmány esetében egy 16 elktródás gráfot választottunk, amelyek a következő ábra szemléltet:



A betáplált adatok:

- a mérési frekvenciák = $6,28 \cdot 10^{-4},6,28,6,28 \cdot 10^{4}$
- az alkalmazott gerjesztőáram amplitúdója 1 µA
- a hozzáadott zaj értéke 1 %

Az optimalizáció eredményeit a következő két ábra mutatja:





A relatív hiba eloszlás a következő:





Az eljárás 39 lépésből konvergált, a hiba értéke: $1.1378 \cdot 10^{-16}$, a futási idő: 136.783070 s. Az egyenletek száma: 1536, míg az ismeretlenek száma:976. A fenti ábrákból is látható, hogy a rekonstrukció sikeres, a visszaállított R és C értékek relatív hibája 6% alatt marad. A zaj hozzáadása nem volt jelentős hatással a végeredményre.

5. ÖSSZEGZÉS

Az eddigi fejezetekben leírtak alapján jelenleg egy olyan algoritmus készül, mely a képrekonstrukció során felmerülő inverz probléma megoldásához szükséges egyenletrendszert állítja elő. Az algoritmus szándékaink szerint teljesen univerzális, ami azt jelenti, hogy bármekkora elektródaszám és héj darabszám esetében képes összeállítani a megoldandó egyenletrendszert és megoldani azt.

A számítási algoritmus fejlesztésével a következő irányokban léphetünk tovább:

- 1. szakirodalmazás segítségével kiválasztjuk azokat a matematikai eljárásokat, melyek alkalmasak az ilyen egyenletrendszerek megoldására (algoritmus gyorsításának és robusztusságának növelése),
- 2. az algoritmust ki kell egészítenünk a képalkotáshoz szükséges elvi és matematikai alapokkal, valamint azok algoritmikus megvalósításával,
- 3. a matematikai modellt úgy kell megalkotnunk, hogy az tényleges fizikai modell megoldására legyen alkalmas (peremfeltételek definiálása, mérési stratégiák kiválasztása stb.)
- 4. a megvalósított algoritmust fizikai modellen validáljuk.

SZAKIRODALOMJEGYZÉK

- 1. Standeisky I.: Elektrodinamika; 2007, Egyetemi Jegyzet, Széchenyi István Egyetem, UNIVERSITAS-GYŐR Kht., Győr
- 2. Holder, D. S.: ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY, 2005, Methods, History and Applications, Institute of Physics Publishing, IOP Publishing Ltd.
- 3. Duraiswami R., Sarkar K., Chahine G. L.: "Efficient 2D and 3D electrical impedance tomography using dual reciprocity boundary element techniques", Engineering Analysis with Boundary Elements 22 (PII: S0955-7997(98)00028-9), 1998, 13–31,
- 4. Rasteiro, M. G., Silva, R., Garcia, F. A. P. and Faia P.: "Electrical Tomography: a review of Configurations and Applications to Particulate Processes", 2011, Hosokawa Powder Technology Foundation
- 5. Erkel, A., Dr Meskó, A., Dr Stegena, L.: Geofizikai Kutatási Módszerek III., 1970, Felszíni Geofizika, Tankönykiadó Vállalat, Bp.
- 6. Lesparre N., Adler A., Gibert D., Nicollin F.: Electrical Impedance Tomography in geophysics, application of EIDORS, 2017
- 7. Polydorides, N.: Image reconstruction algorithms for soft-field tomography, 2002, UMIST, PhD thesis
- 8. Lipponen, A., Seppanen, A., Kaipio, J. P.: "Reduced order estimation of nonstationary flows with electrical impedance tomograpohy", 2010, 17th Australasian Fluid Mechanics Conference
- Meraa, NS., Lesnic, D.: A boundary element method for the numerical inversion of discontinuous anisotropic conductivities. 2003, Engineering Analysis with Bondary Elements 27
- Kima, K. Y.,Kima, B. S.,Kimb, M. C., Kimc, S.: "Dynamic inverse obstacle problems with electrical impedance tomography, Mathematics and Computers in Simulation" 2004, 66, 399–408
- 11. Bera, T. K., Nagaraju, J.: "Resistivity imaging of a reconfigurable phantom with circular inhomogeneities in 2D-electrical impedance tomography", 2010, ELSEVIER 44, 0263-2241
- George D. L. and Ceccio S. L: "Validation of Electrical-impedance Tomography for Measurements of Material Distribution in Two-phase Flows", Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, University of Michigan, 48109-2121 USA
- 13. Woo, E. J.: "Impedance Spectroscopy and Multi-Frequency Electrical Impedance Tomography", 2007, International Journal of Bioelectromagnetism, Vol. 9 No. 2
- 14. Oh, T. I., Koo, H., Lee, K. H., Kim, S. M., Lee, J., Kim, S. W., Seo J. K. and Woo, E. J.: "Validation of a multi-frequency electrical impedance tomography (mfEIT) system KHU Mark1: impedance spectroscopy and time-difference imaging", 2008, IOP PUBLISHING, Physiol. Meas. 29 295–307
- 15. Grieve, B. D.: On-line Electrical Impedance Tomography for Industrial Batch Processing, 2002, Department of Chemical Engineering UMIST, Manchester, UK, Thesis
- 16. Hua, P., Woo, E. J., Webster, J. G., Tompkins, W. J.: "Improved Methods to Determine Optimal Currents in Electrical Impedance Tomography", 1992, IEEE Transactions On Medical Imaging. Vol. 1 I, NO. 4,
- Wang, M.: Three- dimensional Effects in Electrical Impedance Tomography, 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14-17, 1999
- 18. Maimaitijiang, Y., Bohm, S., Gaggero, P. O., Adler A.: "Evaluation of EIT System Performance", Physiol Meas. 2011 Jul;32(7):851-65

- 19. Hossain, M. A., Dr. A.-U.-Ambia, Aktaruzzaman, M., Khan, M. A.: "Implementation of Radon Transformation for Electrical Impedance Tomography (EIT)", International Journal of Information Sciences and Techniques (IJIST) Vol.2, No.5, September 2012
- 20. Uhlmann, G.: Electrical impedance tomography and Calder'on's problem, 2009 Inverse Problems 25 123011
- 21. Lee, I. B.: Determining Conductivity by Boundary Measurements: Some Numerical Results, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, Maryland, Technical Note, 1988,
- 22. Parker, M. J.: An Inverse Problem for Networks, Electrical, Massachussetts Institute of Technology, 1990
- 23. Simonyi, K., Zombory, L.: Elméleti villamosságtan, Műszaki Kiadó, 2006.
- 24. Adler, A., Lionheart, W. R. B.: Uses and abuses of EIDORS: An extensible software base for EIT, 2006 Physiol. Meas.
- 25. Adler, A., Borsic, A., Polydorides, N., Lionheart, W. R. B.: Simple FEMs aren't as good as we thought: experiences developing EIDORS v3.3, Manchester Institute for Mathematical Sciences, 2008.
- 26. Polydorides, N., Lionheart W. R. B.: "A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography: a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project", 2002 Meas. Sci. Technol. 13 1871
- Vauhkonen, M., Lionheart, W. R. B., Heikkinen, L. M., Vauhkonen, P. J., Kaipio, J. P.: A MATLAB package for the EIDORS project to reconstruct two-dimensional EIT images, 2001 Physiol. Meas. 22 107
- 28. Aster, R. C., Borchers, B. and Thurber, C. H.: Parameter Estimation and Inverse Problems, Elsevier Academic Press, 2005.
- 29. http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_nemlinearis_optimalizalas/ch 04s02.html
- Hanka, L.: An efficient quadratic programming optimization method for deconvolution of gamma-ray spectra, AARMS Technology, Vol. 9, No. 1 (2010) 47– 66
- Márki, F: Zajforrások azonosítása peremelem módszer alapokon, Doktori (Phd) Értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Híradástechnikai Tanszék, Budapest, 2010
- 32. [48] P. C. Hansen, Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems, Numerical Algorithms, 6 (1994), pp. 1-35.
- 33. [49] P. C. Hansen, Regularization Tools Version 4.0 for Matlab 7.3, Numerical Algorithms, 46 (2007), pp. 189-194.
- 34. [50] P. C. Hansen, Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion, SIAM, Philadelphia, 1998.