

Vizvári Z.<sup>1</sup> – Györfi N.<sup>2</sup> – Klincsik M.<sup>3</sup> – Sári Z.<sup>3</sup> – Odry P.<sup>4</sup>

*<sup>1</sup>Mérnöki és Smart Technológiák Intézet, Környezetmérnök Tanszék  
Pécsi Tudományegyetem, Műszaki és Informatikai Kar  
7624 Pécs, Boszorkány út 2.*

*<sup>2</sup>Élettani Intézet  
Pécsi Tudományegyetem, Általános Orvostudományi Kar  
7624 Pécs, Szigeti út 12.*

*<sup>3</sup>Informatika és Villamos Intézet, Műszaki Informatika Tanszék  
Pécsi Tudományegyetem, Műszaki és Informatikai Kar  
7624 Pécs, Boszorkány út 2.*

*<sup>4</sup>Informatikai Intézet, Számítógéprendszerek és Irányítástechnikai Tanszék  
Dunaújvárosi Egyetem  
2401 Dunaújváros, Táncsics Mihály utca 1/A fszt.*

## **ÚJ MEGKÖZELÍTÉSŰ ELEKTROMOS IMPEDANCIA TOMOGRÁFIÁS REKORNSTRUKCIÓS ALGORITMUS VALIDÁLÁSA IMPEDANCIA HÁLÓZATON**

Kutatócsoportunk a módszer megvalósításának egy új nézőpontját vizsgálja. Ennek következtében a vizsgált, kontinuumnak tekinthető, anyagot koncentrált paraméterű, lineáris hálózatként modellezzük. Cikkünkben sikerült általánosítani a matematikai modellt olyan mértékben, hogy az anyag dielektromos állandóját (azaz koncentrált paraméter párját a kapacitást) is figyelembe vegye. Így annak ellenére, hogy jelentősen megnöveltük az ismeretlenek számát a modellben, lehetőséget teremtettük a multifrekvenciás megközelítés alkalmazására, aminek következtében az optimalizált egyenletrendszer mindig túlhatározott marad. A matematikai modell definiálása után fizikai modellt készítettünk, amelyen validálva a módszert, visszakaptuk a gráf ágaira elhelyezett ellenállás és kondenzátor értékeket azok toleranciáján belül.

### **1. ELMÉLETI HÁTTÉR (SZAKIRODALOM-KUTATÁS) ÉS KIÉRTÉKELŐ ALGORITMUS FEJLESZTÉSE**

Az EIT kiértékelési algoritmusainak elméleti háttérével foglalkozó szakirodalmak mennyisége igen jelentős abbaól fakadóan, hogy a roncsolásmentes eljárást igen széles körben használják. Beszámolónkban igyekeztünk azokat megjelölni, melyek valamilyen módon hasznunkra váltak. Ezek a [1] – [27].

Az EIT mérés alapvető parciális differenciál egyenlete képezi a kiértékelés alapját: [2]

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = 0 \quad (1.1)$$

Ez az elektromosságban Poisson-egyenletként ismert és abban az esetben, ha a vezetőképesség a helytől független, azaz homogén, izotróp közegben, Laplace-egyenletre egyszerűsödik: [2]

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.2)$$

Mind a Poisson-, és a Laplace-egyenlet megoldható az ún. Dirichlet-, és Neumann-peremfeltételek, vagy mindkettő egyidejű megadásával. [2]

A megoldáshoz többféle matematikai módszer áll a rendelkezésre. Ilyenek a véges elem módszer (FEM, Finite Element Method, [2]), a peremelem módszer (BEM, Boundary Element Method, [3]), a véges differenciák módszere (FD, Finite Differences) stb.

A mérés során a legfőbb célunk, hogy az (1.1) egyenletben szereplő, helytől függő vezetőképességet határozzuk meg. Erre különböző inverz probléma megoldási módszerek állnak a rendelkezésünkre: [4]

- LBP: linear back projection („lineáris visszavetítés”)
- nem lineáris módszerek,
- heurisztikus (empírikus) módszerek.

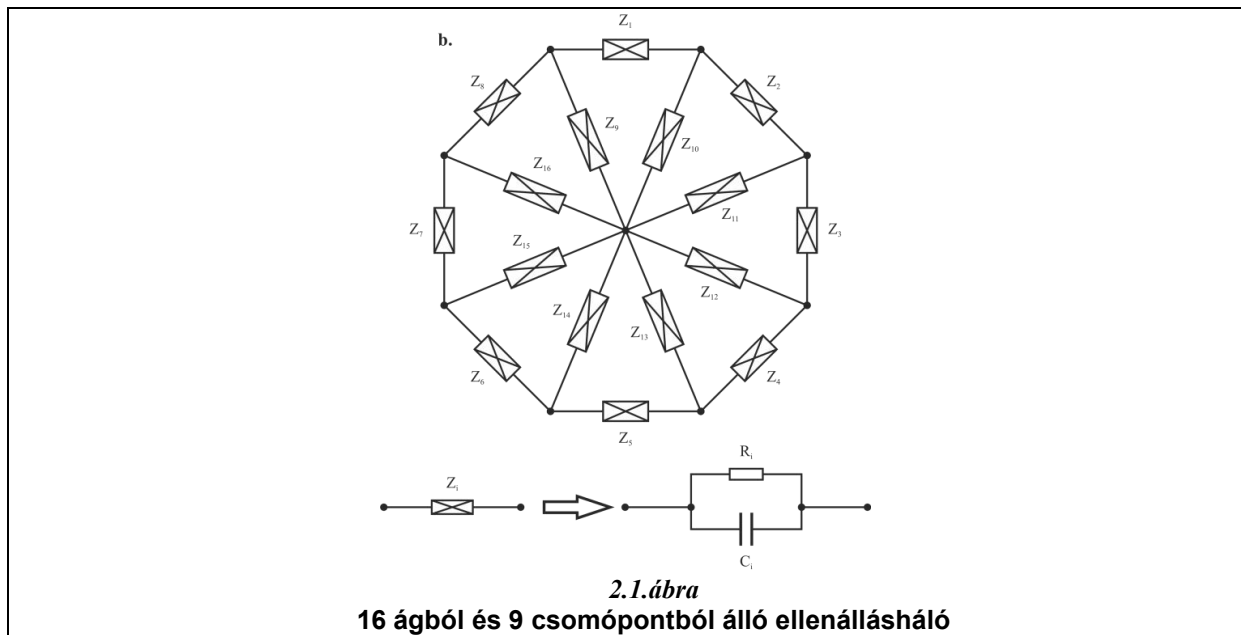
Az EIT mérések a mérési geometria szempontjából két fő csoportra oszthatóak fel:

1. ha a földfelszínen helyezük el az elektródákat, végtelen féltérrel modellezhetjük az adott szituációt;
2. ha élő fára helyezük el az érzékelőket egy kör mentén, zárt geometriával, körrel modellezhetjük a mérést.

## 2. KIÉRTÉKELŐ ALGORITMUS FEJLESZTÉSE

A kiértékelés, illetve az ún. inverz feladat megoldásának közelítése érdekében, az ezirányú kutatási munka első lépéseként fontosnak tartottuk, hogy magát a fizikai hátteret olyan mértékig egyszerűsítsük, hogy szinte kizárólag az inverz feladat megoldására tudjunk koncentrálni. Így jutottunk el addig a megfontolásig, hogy első lépésben a folytonos fizikai rendszerekről diszkrét, koncentrált paraméterű rendszerekre térünk át. Így a differenciálegyenlet által leírt fizikai rendszert passzív, lineáris áramkörti elemek hálózatára egyszerűsítettük. Meglepő volt számunkra, hogy a fizikai problémát az elméleti villamosságban egyik kiemelt inverz problémájaként tartják számon és igen nagy irodalma van. Ilyenek például a [28] – [32].

A mérési eredmények kiértékeléséhez néhány idealizált esetben lehetséges analitikus megoldást is találni, további problémák megjelenésénél, általában, numerikus megoldást szükséges használni. Ilyen ajánlott megoldás a Véges Elem Módszer (FEM). ([2]) Hervé Gagnon és szerzőtársai szerint ([28]) a FEM-es mérés kiértékelés gyakorlatilag analóg a Kirchhoff-csomóponti és huroktörvények felírásával felállítható egyenletrendszer megoldásával. Ezt használtuk ki a matematikai modellünk megalkotásához. A matematikai modell gyakorlatilag egy impedancia hálózattal (lineáris passzív hálózattal) helyettesíti a folytonos anyagot. A hálózatban szereplő admittancia értékek kiszámítása a feladat az áramgenerátoros gerjesztés és a peremen végzett feszültség mérések segítségével. (2.1. ábra):



A mérési eredmények kiértékeléséhez néhány idealizált esetben lehetséges analitikus megoldást is találni, további problémák megjelenésénél, általában, numerikus megoldást kell használni. Ilyen ajánlott megoldás a Végés Elem Módszer (FEM). ([2]) Hervé Gagnon és szerzőtársai szerint ([28]) a FEM-es mérésiértékelés gyakorlatilag analóg a Kirchhoff-csomóponti és huroktörvények felírásával felállítható egyenletrendszer megoldásával. Ezt használtuk ki a matematikai modellünk megalkotásához. A matematikai modell gyakorlatilag egy impedancia hálózattal (lineáris passzív hálózattal) helyettesíti a folytonos anyagot. A hálózatban szereplő admittancia értékek kiszámítása a feladat az áramgenerátoros gerjesztés és a peremen végzett feszültség mérések segítségével. (2.1. ábra):

Az inverz feladat megfogalmazása a következő: határozzuk meg az  $R_1, R_2, \dots, R_{12}$  értékeket, abban az esetben ha csak az ellenállások által alkotott háló szerkezetét ismerjük!

A példa megoldásához alkalmazhatóak a passzív, lineáris hálózat leírását szolgáló Kirchhoff-törvények, illetve az Ohm-törvény, melyeket gráfelméletes hálózatszámítási módszerek segítségével így fogalmazhatunk meg mátrix alakban:[22]

1. Kirchhoff-csomóponti törvény (Kirchhoff's Current Law, KCL):

$$\mathbf{A}^T \vec{i}_b = \vec{i}_g \quad (2.1)$$

2. Kirchhoff huroktörvény (Kirchhoff's Voltage Law, KVL):

$$\vec{v}_b = \vec{e}_g - \mathbf{A} \vec{u}_n \quad (2.2)$$

3. Ohm-törvény (Ohm's Law, OL):

$$\vec{v}_b = \mathbf{G} \vec{i}_b \quad (2.3)$$

Ahol

$\mathbf{A}$ : a hálózat gráfját és a felvett áramirányokat leíró ág – csomópont topológiai mátrix

$\vec{e}_g$ : a hálózat ágaiban található feszültséggenerátorok vektora,

$\vec{i}_g$ : a hálózat ágaiban található áramgenerátorok vektora,

$\vec{i}_b$ : a hálózat ágain folyó áramok vektora,

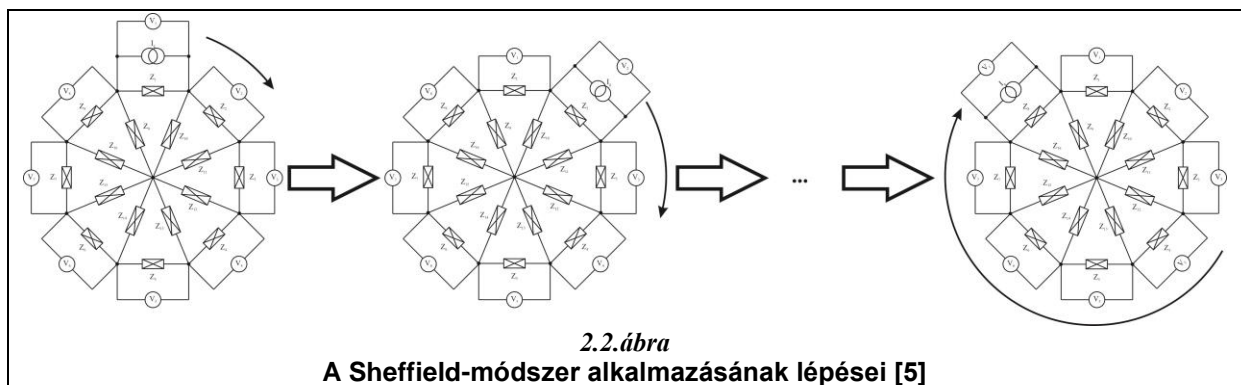
$\vec{u}_n$ : a hálózat csomópontjaiban, (egy tetszőlegesen kijelölt 0V-hoz képest) mérhető potenciálok vektora,

$\vec{v}_b$ : a hálózat ágain mérhető feszültségesések vektora,

$\mathbf{G}$ : a hálózat ágain levő vezetőképességek mátrixa (diagonális mátrix).

A fenti egyenletekből egyértelműen kiolvasható, hogy a célunk a  $\mathbf{G}$  mátrix kiszámítása, ami első lépésben nem tűnik nehéz feladatnak. Azonban, ha szembesülünk azzal a ténnyel, hogy a méréseinket, azaz az adatgyűjtést csak a peremen végezhetjük, tehát az  $R_1, R_2, \dots, R_8$  ellenállások ágain (2.1. ábra), akkor jövünk rá, hogy valójában sokkal több ismeretlenünk van, mint egyenletünk.

A helyzeten javíthatunk, ha egy ún. mérési stratégiát választunk. A mérés kivitelezéséhez első lépésben a Sheffield-módszert („adjacent-pattern”) használtuk. Ennek első lépését szemlélteti a 2.2. ábra. A Sheffield-módszer esetében áramgenerátoros gerjesztést alkalmazunk, melyet egy, a peremen elhelyezkedő ágra (szomszédos csomópontokra) kötünk. A méréseket is ezt követve végezzük: a peremen, szomszédos csomópontokra kötjük a mérőcsatornák bemeneteit. Mivel differenciális mérőbemenetekkel rendelkezünk, ezért a polaritás-helyesen bekötött mérőcsatornák segítségével a peremen elhelyezkedő ágakon eső feszültségeket mérjük, azonos polaritással.



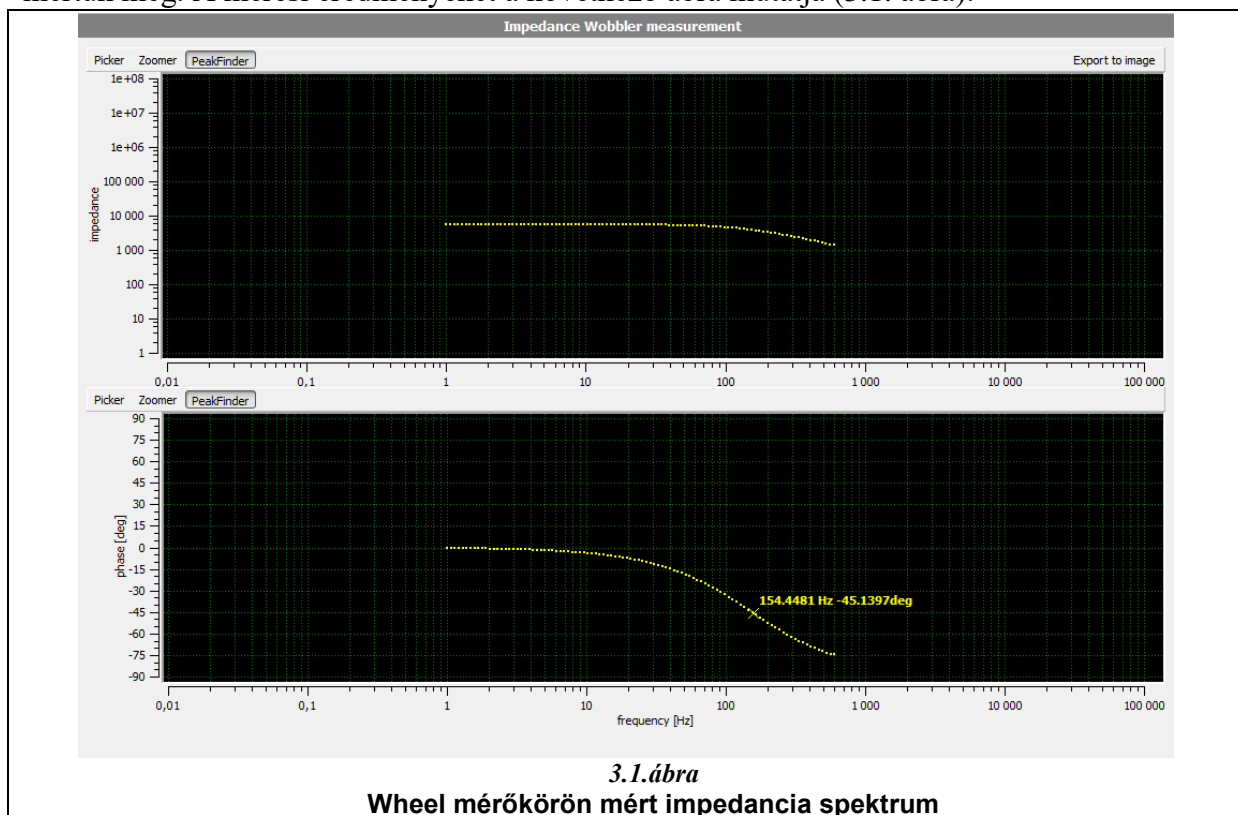
Az alkalmazott impedancia modell előnyei között szerepel, hogy az egyes ágakon szereplő impedancia (vagy admittancia) értékek frekvenciafüggőek. Ez azt jelenti, hogy az impedancia értékek számításában a frekvencia változóként szerepel. Ennek következményeként megállapítható, hogy több frekvencián a mérési eredmények különböznek, azonban az ezek számításához használt paraméterek (ellenállás, kapacitás) minden egyenletrendszer esetében ugyanazok. Ez lehetőséget ad arra, hogy az eddigiekben ismert mérési protokollt megismételve egy másik frekvencián megduplázzuk az egyenletrendszerünk számát úgy, hogy az ismeretlen ellenállás és kapacitás értékek nem változnak. Így a második, harmadik stb. frekvencián megismételve sokszorozni tudjuk az egyenletrendszerünk számát. Ez oda vezet, hogy bármilyen bonyolultságú gráf esetében túlhatározottá tudjuk tenni az egyenletrendszert.

### 3. A KIÉRTÉKELŐ ALGORITMUS VALIDÁLÁSA

Az 1.1 ábrán látható áramköri elrendezés (fantom) egy 16 ággal és 9 csomóponttal rendelkező gráfot reprezentál. Ennek minden ágán található egy párhuzamos RC tag, amelyek esetében  $R_{1...8} = 8,2 \text{ k}\Omega$ -os,  $R_{9...16} = 8,2 \text{ k}\Omega$ -os ellenállásból és  $C_{1...16} = 100 \text{ nF}$  kondenzátorokból. Mielőtt az ellenállásokat és kondenzátorokat beépítettük, megmértük az R és C értékeket. Ehhez egy (6 ½ digités) Keithley 2100 multimétert használtunk. Az ellenállások tűrése jobb, mint 1%, a kondenzátoroknál ez legfeljebb 5%.

Az 2.1. ábrán látható wheel elnevezésű [28] mérési elrendezés esetében az egyes ágakon levő impedanciákat alkotó R és C elemek kiszámítását saját fejlesztésű algoritmus segítségével végezzük ([28] – [35]). Az ilyen típusú inverz probléma megoldásához igen pontos és nagy felbontású adatokra van szükség, ezért a sikeres rekonstrukció kulcsa szinte csak a gyűjtött adatok pontosságától és felbontásától függ. ([2]) Így ez a validáló mérés a saját fejlesztésű mérőrendszer validálásához is alkalmas.

A validálás első lépése impedancia spektrum mérés volt a wheel modellen. Ennek során a mérőkörön elhelyezett generátor kapcsok között mért eredő impedancia frekvenciafüggését mértük meg. A mérési eredményeket a következő ábra mutatja (3.1. ábra):



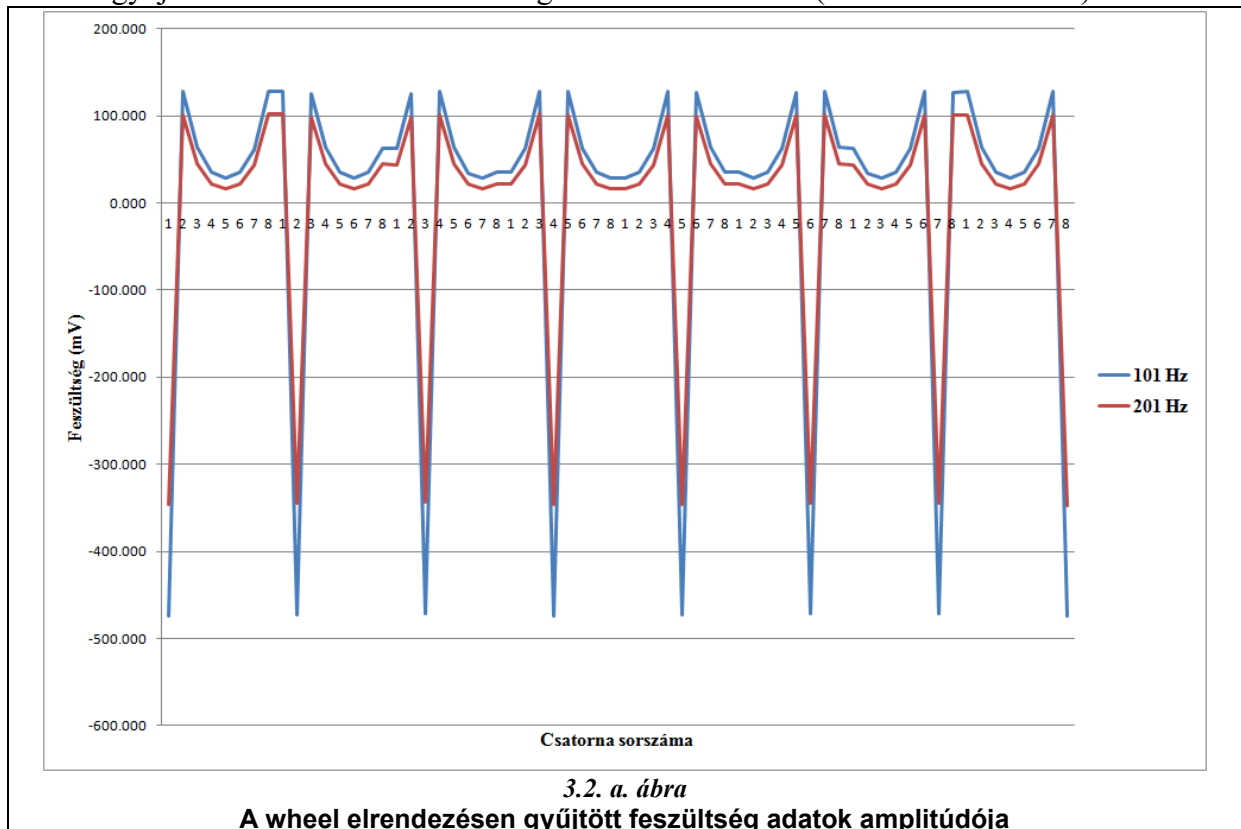
A mérés beállításai a következők voltak: kezdő frekvencia 1 Hz, végfrekvencia 600 Hz. A frekvenciatartomány 100 frekvencia pontra lett felbontva, tehát ebben a frekvencia intervallumban 100 mérés történt (a felosztás automatikus). A spektrum mérés eredménye az elvártnak megfelelő, ebben a frekvenciatartományban látható a vizsgált hálózat rezonancia frekvenciája, ahol az impedancia amplitúdó görbe (felső, log-log diagram) „letörik”, illetve a fázis görbe (alsó, lin-log diagram) pedig  $0^\circ$ -ról indulva  $-90^\circ$ -hoz tart (fordul). A rezonancia frekvencia ott van, ahol a fázis a  $-45^\circ$ -os értéket veszi fel. Az 3.1. ábra esetében 154,45 Hz-en mértünk  $-45,14^\circ$ -ot.

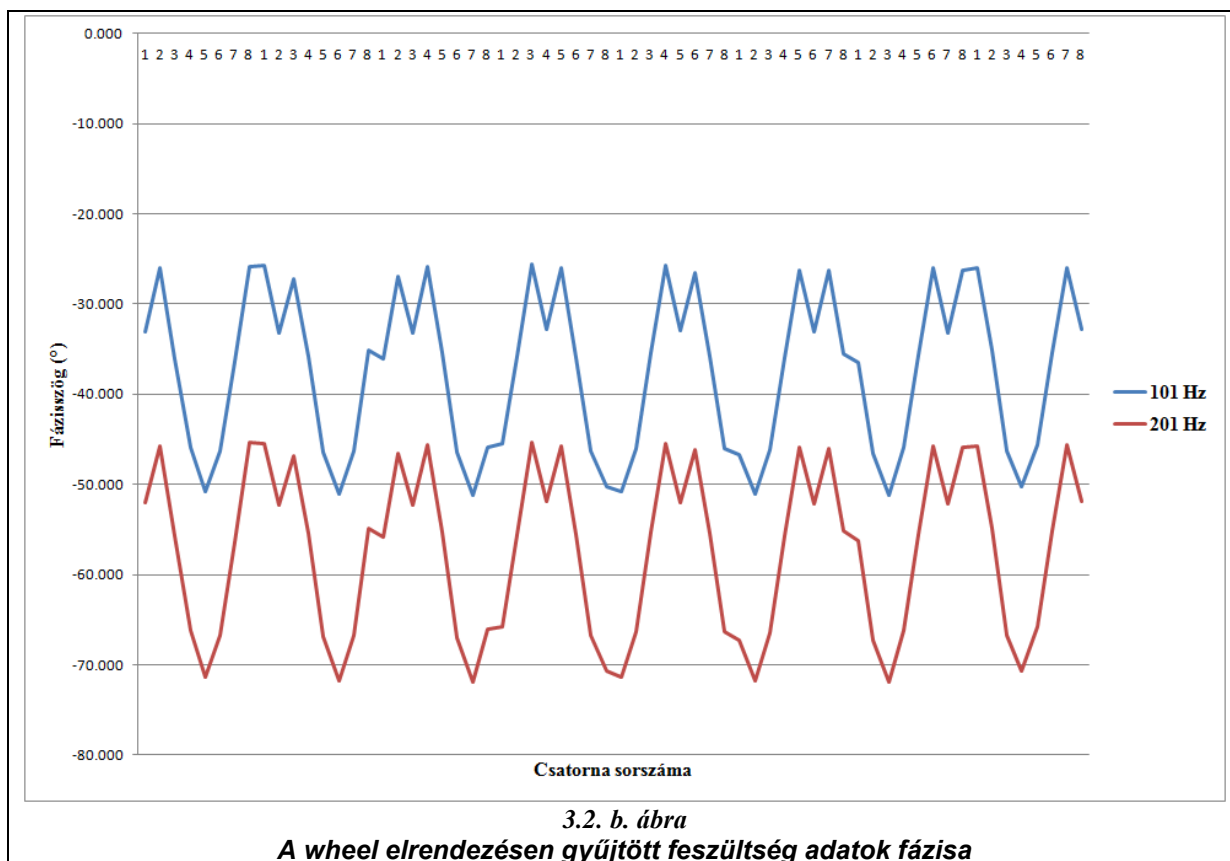
Az ellenállás és kondenzátor értékek rekonstrukciójához, a Sheffield-módszer szerint ([28]) rögzített mérőcsatornák mellett, minden generátor pozíció esetében történik adatgyűjtés. Ez 8 generátor pozíció esetén, generátor pozícióként mindösszesen 64 adatot jelent egy frekvencián. A rekonstrukciós algoritmus azonban megköveteli, hogy az inverz

probléma túlhatározottá tétele érdekében egy másik frekvencián is történjen adatgyűjtés, ami megduplázza a gyűjtött adatok számát.

Az impedancia értékek rekonstrukcióját saját fejlesztésű algoritmussal végezzük, ami megköveteli, hogy a méréseket még egy frekvencián végezzük. Így tulajdonképpen 101 Hz-en és 201 Hz-en végeztük el a Sheffield protokollt. Az inverz probléma megoldó algoritmus igen érzékeny a gyűjtött adatok statisztikai jellemzőire, ami azt jelenti, hogy rossz jel-zaj viszonytal, nagy szórással gyűjtött adatok olyan mértékű bizonytalanságot jelenthetnek, ami a rekonstrukciót akadályozhatja. Így a jelenlegi validáló mérés az inverz probléma megoldó algoritmus ellenőrzésén túl a műszer validálását is jelentheti.

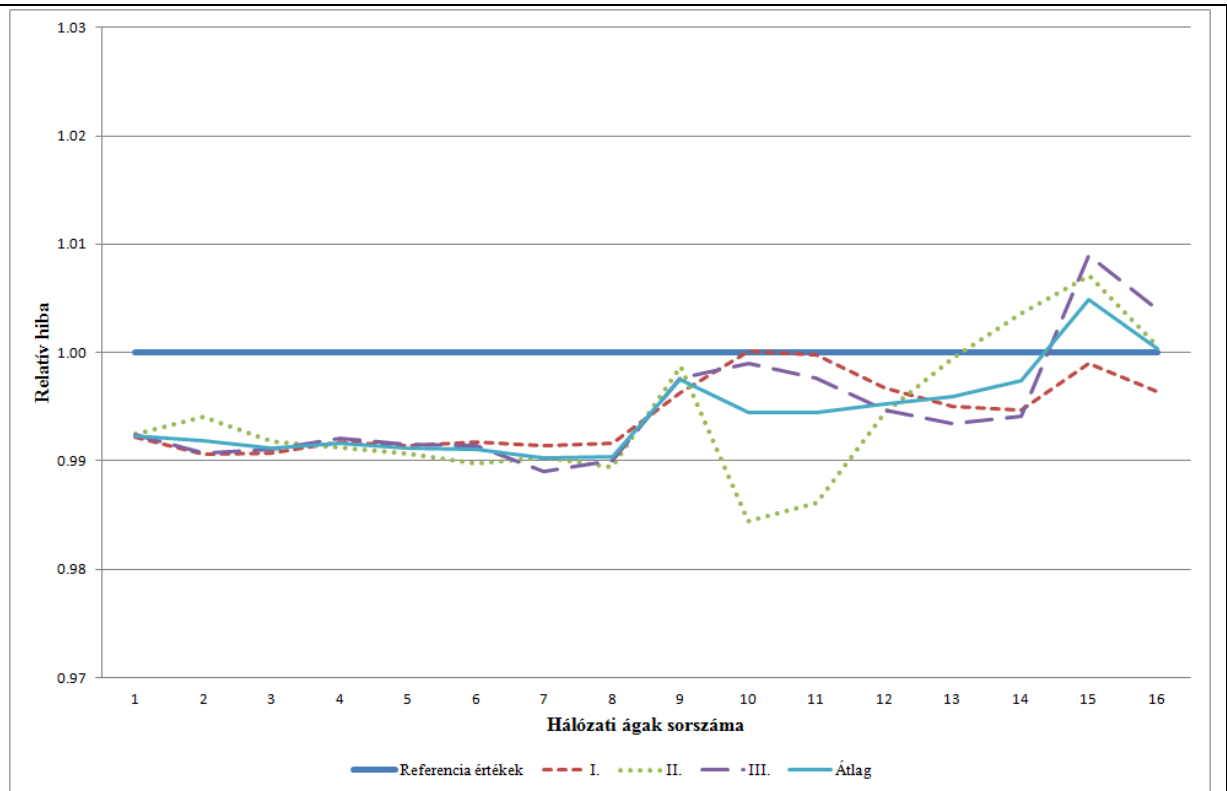
A gyűjtött adatokat a következő diagramok szemléltetik: (3.2. a. és 3.2.b. ábra)





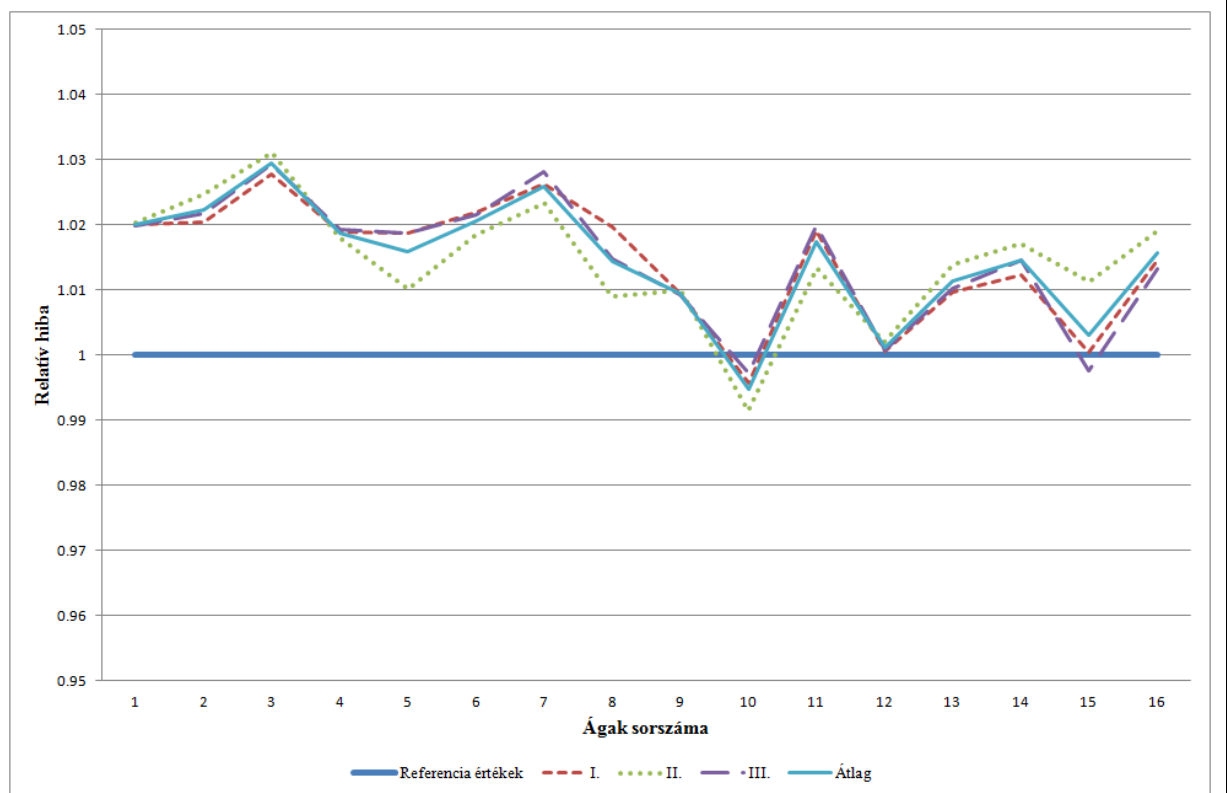
A 3.2. a. és 3.2. b. ábrákon látszik, hogy a generátor pozíciója változik a mérés során, a mérőcsatornák ugyan azon a helyen maradnak. A gerjesztés vándorlása mind az amplitúdó, mind pedig a fázis esetében tisztán megfigyelhető. Ezekben a pontokban a mért komplex feszültség ellenkező előjelű. Továbbá látszik még, hogy az egyes forgatások során mért értékek dinamika tartománya közel állandó, a körbejárás során nem változik. Ez arra utal, hogy a hálózat belső elemei azonos értékűek. A 3.2. a. és 3.2. b. ábrákon a mérési eredmények frekvencia függése is kiolvasható. Ezek alapján megállapítható, hogy a frekvencia növekedésével a mérési eredmények abszolút értéke csökken, a fázis konstans értékkel tolódik.

Az adatgyűjtést és ezzel együtt rekonstrukciót összesen háromszor végeztük el, majd a kiértékelés során külön ábráztuk az egyes mérésenként és az ezek átlagából visszaállított ellenállás és kondenzátor értékek relatív hibáját, melyek számításánál az aktuális értékeket a beépített alkatrészekon mért értékekhez viszonyítottuk. A visszaállítás során kapott viszonylag nagy mennyiségű adat jóságának szemléltetéséhez a relatív hibát vettük alapul, melyet a 3.3.a. és 3.3.b. ábrán mutatjuk be.



3.3.a. ábra

Wheel elrendezésen gyűjtött feszültség adatokból számított ellenállás értékek relatív hibája



3.3.b. ábra

Wheel elrendezésen gyűjtött feszültség adatokból számított kondenzátor értékek relatív hibája



Az 3.3.a. és 3.3.b. ábrán a kék, vastag vonal jelöli a referencia értékeket, míg a többi a mérés és a méréskiértékelés során kapott ellenállás és kondenzátor értékeket. Az 3.3.a. ábrán látszik, hogy az ellenállás értékek a névleges értékek körül ingadoznak. Az ingadozás a mérési eredmények szórásának tudható be. A névleges értékekhez viszonyított relatív hiba maximális értéke az ellenállások esetében 1,58 %, míg a kondenzátor értékek esetében (3.3.b. ábra) 3,01 %. Az eredményekről megállapíthatjuk, hogy meglepően jól közelítik a referencia értékeket. Az egyes ágakon számított admittancia értékek mind valós, mind pedig imaginárius része, valamint az ebből származtatható ellenállás és kondenzátor értékek hibája a legtöbb esetben az alkatrészek tűrésén belüli, tehát a validálás sikeres.

#### 4. TOVÁBBLÉPÉSI LEHETŐSÉGEK

A komplex írásmód bevezetésével lehetőségünk nyílik a vizsgált anyag dielektromos tulajdonságainak pontosabb és alaposabb kivizsgálására. Így a gyűjtött adatokból az anyagszerkezet vezetőképesség eloszlása mellett a dielektromos állandó térbeli eloszlására is következtethetünk. A cikkünkben bemutatott mérőföldkő elérésével és bemutatásával, azaz a számítási algoritmus validálásával két irányban léphetünk tovább:

1. bővíthetjük az impedancia hálózatot oly mértékig, hogy már a vizsgált anyagot közelítse,
2. mivel problémát jelent az inverz probléma megoldó szoftver esetében, hogy a jelenlegi algoritmus a hálózat bonyolításával jelentős mértékben lassul és a megoldás gyakorlatilag kivárthatatlan, ezért tervezzük a program átfordítását MATLAB-ba, mellyel reményeink szerint jelentős mértékben gyorsul majd.

A két lehetőség közül, döntésünk szerint az utóbbit választjuk, mi szerint megkezdjük algoritmusunkat átírni teljesen numerikussá, azaz MatLab kód építését kezdjük meg. Ennek bonyolításával, reményeink szerint gyorsabb működésű algoritmust nyerhetünk.

#### SZAKIRODALOMJEGYZÉK

1. Standeisky I.: Elektrodinamika; 2007, Egyetemi Jegyzet, Széchenyi István Egyetem, UNIVERSITAS-GYŐR Kht., Győr
2. Holder, D. S.: ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY, 2005, Methods, History and Applications, Institute of Physics Publishing, IOP Publishing Ltd.
3. Duraiswami R., Sarkar K., Chahine G. L.: „Efficient 2D and 3D electrical impedance tomography using dual reciprocity boundary element techniques”, Engineering Analysis with Boundary Elements 22 (PII: S0955-7997(98)00028-9), 1998, 13–31,
4. Rasteiro, M. G., Silva, R., Garcia, F. A. P. and Faia P.: „Electrical Tomography: a review of Configurations and Applications to Particulate Processes”, 2011, Hosokawa Powder Technology Foundation
5. Erkel, A., Dr Meskó, A., Dr Stegena, L.: Geofizikai Kutatási Módszerek III., 1970, Felszíni Geofizika, Tankönykiadó Vállalat, Bp.
6. Lesparre N., Adler A., Gibert D., Nicollin F.: Electrical Impedance Tomography in geophysics, application of EIDORS, 2017
7. Polydorides, N.: Image reconstruction algorithms for soft-field tomography, 2002, UMIST, PhD thesis
8. Lipponen, A., Seppanen, A., Kaipio, J. P.: „Reduced order estimation of nonstationary flows with electrical impedance tomography”, 2010, 17th Australasian Fluid Mechanics Conference

9. Meraa, NS., Lesnic, D.: A boundary element method for the numerical inversion of discontinuous anisotropic conductivities. 2003, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 27
10. Kima, K. Y., Kima, B. S., Kimb, M. C., Kimc, S.: „Dynamic inverse obstacle problems with electrical impedance tomography, *Mathematics and Computers in Simulation*” 2004, 66, 399–408
11. Bera, T. K., Nagaraju, J.: „Resistivity imaging of a reconfigurable phantom with circular inhomogeneities in 2D-electrical impedance tomography”, 2010, *ELSEVIER* 44, 0263-2241
12. George D. L. and Ceccio S. L.: „Validation of Electrical-impedance Tomography for Measurements of Material Distribution in Two-phase Flows”, Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, University of Michigan, 48109-2121 USA
13. Woo, E. J.: „Impedance Spectroscopy and Multi-Frequency Electrical Impedance Tomography”, 2007, *International Journal of Bioelectromagnetism*, Vol. 9 No. 2
14. Oh, T. I., Koo, H., Lee, K. H., Kim, S. M., Lee, J., Kim, S. W., Seo J. K. and Woo, E. J.: „Validation of a multi-frequency electrical impedance tomography (mfEIT) system KHU Mark1: impedance spectroscopy and time-difference imaging”, 2008, *IOP PUBLISHING, Physiol. Meas.* 29 295–307
15. Grieve, B. D.: *On-line Electrical Impedance Tomography for Industrial Batch Processing*, 2002, Department of Chemical Engineering UMIST, Manchester, UK, Thesis
16. Hua, P., Woo, E. J., Webster, J. G., Tompkins, W. J.: „Improved Methods to Determine Optimal Currents in Electrical Impedance Tomography”, 1992, *IEEE Transactions On Medical Imaging*. Vol. 11, NO. 4,
17. Wang, M.: *Three-dimensional Effects in Electrical Impedance Tomography*, 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14-17, 1999
18. Maimaitijiang, Y., Bohm, S., Gaggero, P. O., Adler A.: „Evaluation of EIT System Performance”, *Physiol Meas.* 2011 Jul;32(7):851-65
19. Hossain, M. A., Dr. A.-U.-Ambia, Aktaruzzaman, M., Khan, M. A.: „Implementation of Radon Transformation for Electrical Impedance Tomography (EIT)”, *International Journal of Information Sciences and Techniques (IJIST)* Vol.2, No.5, September 2012
20. Uhlmann, G.: *Electrical impedance tomography and Calderón's problem*, 2009 *Inverse Problems* 25 123011
21. Lee, I. B.: *Determining Conductivity by Boundary Measurements: Some Numerical Results*, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, Maryland, Technical Note, 1988,
22. Parker, M. J.: *An Inverse Problem for Networks*, Electrical, Massachusetts Institute of Technology, 1990
23. Simonyi, K., Zombory, L.: *Elméleti villamosságatan*, Műszaki Kiadó, 2006.
24. Adler, A., Lionheart, W. R. B.: *Uses and abuses of EIDORS: An extensible software base for EIT*, 2006 *Physiol. Meas.*
25. Adler, A., Borsic, A., Polydorides, N., Lionheart, W. R. B.: *Simple FEMs aren't as good as we thought: experiences developing EIDORS v3.3*, Manchester Institute for Mathematical Sciences, 2008.
26. Polydorides, N., Lionheart W. R. B.: „A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography: a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project”, 2002 *Meas. Sci. Technol.* 13 1871

27. Vauhkonen, M., Lionheart, W. R. B., Heikkinen, L. M., Vauhkonen, P. J., Kaipio, J. P.: A MATLAB package for the EIDORS project to reconstruct two-dimensional EIT images, 2001 *Physiol. Meas.* 22 107
28. Gagnon, H., Cousineau, M., Adler, A., and Hartinger A. E.: A Resistive Mesh Phantom for Assessing the Performance of EIT Systems, IEEE, 2010.
29. Abdulaziz Al-Humaidi: RESISTOR NETWORKS AND FINITE ELEMENT MODELS, thesis, University of Manchester for the degree of Doctor of Philosophy, Faculty of Engineering and Physical Sciences, 2011.
30. Curtis, Mooers, Morrow: Finding the Conductors in Circular Networks From Boundary Measurements, University of Washington, Department of Mathematics, kéziratoss jegyzet
31. Curtis, E., Ingerman, D., Morrow J.: Circular Planar Graphs and Resistor Networks, University of Washington, Department of Mathematics, kéziratoss jegyzet
32. Lionheart, W. R. B., Paridis, K., Adler, A.: Resistor networks and transfer resistance matrices, kéziratoss jegyzet
33. Johnson, M. L.: Essential Numerical Computer Methods, University of Virginia Health System, Departments of Pharmacology and Medicine, Charlottesville, USA, Elsevier 2010.
34. Baker, K.: Singular Value Decomposition Tutorial, kéziratoss jegyzet, 2013.
35. Hogben L: Handbook of Linear Algebra, Taylor & Francis Group, LLC, 2007.